

Chapitre n° 7: Orthogonalité dans l'espace

Terminale, spécialité mathématique, 2021-2022

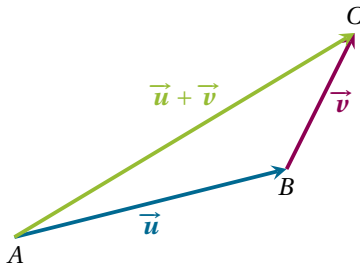
1 Définition du produit scalaire et orthogonalité

Définition 1

Le **produit scalaire** de \vec{u} et \vec{v} , noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$ (qui se lit « \vec{u} scalaire \vec{v} »), est défini par :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2).$$

Remarque 1.



- ★ Concrètement, cela correspond à la moitié de l'écart relatif entre AC^2 et $AB^2 + BC^2$ sur le graphique ci-dessous.
- ★ Le produit scalaire de deux vecteurs n'est pas un vecteur mais **un nombre réel**.

Exemple 1. Soit ABC un triangle tel que $AB = 6$, $AC = 5$ et $BC = 8$. Calculer $\vec{BA} \cdot \vec{AC}$.

Propriété 2

- ① Le produit scalaire est **commutatif**, c'est-à-dire que $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$.
- ② Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.
- ③ $\vec{u} \cdot \vec{u}$ est également noté \vec{u}^2 , appelé « **carré scalaire** de \vec{u} ».
On a alors $\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$.

Preuve. ① On a $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2) = \frac{1}{2} (\|\vec{v} + \vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2) = \vec{v} \cdot \vec{u}$.

② Si $\vec{u} = \vec{0}$, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{0} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{0}\|^2 - \|\vec{v}\|^2) = \frac{1}{2} (\|\vec{v}\|^2 - 0^2 - \|\vec{v}\|^2) = 0$.

Il en va de même si $\vec{v} = \vec{0}$.

③ $\vec{u}^2 = \frac{1}{2} (\|\vec{u} + \vec{u}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{u}\|^2) = \frac{1}{2} (\|2\vec{u}\|^2 - 2\|\vec{u}\|^2) = \frac{1}{2} ((2\|\vec{u}\|)^2 - 2\|\vec{u}\|^2)$
 $= \frac{1}{2} (4\|\vec{u}\|^2 - 2\|\vec{u}\|^2) = \frac{1}{2} (2\|\vec{u}\|^2) = \|\vec{u}\|^2$.

Définition 3

On dit que deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont **orthogonaux**, ce que l'on note $\vec{u} \perp \vec{v}$, si, et seulement si, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Remarque 2. Le vecteur nul est donc orthogonal à tout vecteur du plan.

Propriété 4

Soit \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs non nuls.

\vec{u} et \vec{v} sont orthogonaux si, et seulement si, $(\vec{u}; \vec{v}) = \frac{\pi}{2}$ ou $-\frac{\pi}{2}$ (à un multiple de 2π près).

Preuve. Soit A et B tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et C tel que $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$ comme sur le graphique de la première remarque.

On a alors $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AC}$ ainsi :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\overrightarrow{AC}\|^2 - \|\overrightarrow{AB}\|^2 - \|\overrightarrow{BC}\|^2) = \frac{1}{2} (AC^2 - AB^2 - BC^2).$$

Il en résulte que \vec{u} et \vec{v} sont orthogonaux $\Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} (AC^2 - AB^2 - BC^2) = 0$

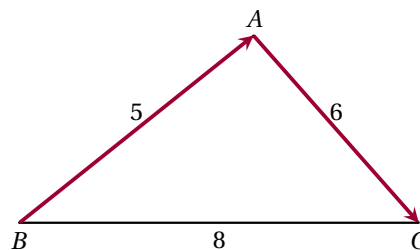
$\Leftrightarrow AC^2 = AB^2 + BC^2 \Leftrightarrow ABC$ est rectangle en B autrement dit $(\vec{u}; \vec{v}) = \frac{\pi}{2}$ ou $-\frac{\pi}{2}$.

Exemple 2. Soit ABC un triangle tel que $AB = 6$, $AC = 5$ et $BC = 8$.

Les vecteurs \overrightarrow{BA} et \overrightarrow{AC} sont-ils orthogonaux ?

D'après l'exemple précédent, $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{3}{2} \neq 0$ donc les vecteurs \overrightarrow{BA} et \overrightarrow{AC} ne sont pas orthogonaux.

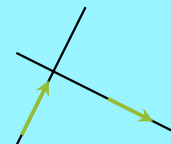
Cela veut dire que, sur la figure ci-contre, les droites (BA) et (AC) ne sont pas perpendiculaires donc que ABC n'est pas rectangle en A .



Remarque 3. Pour deux vecteurs de norme fixée, on dit que le produit scalaire est une mesure du **déficit d'orthogonalité** de ces deux vecteurs : plus il est proche de 0, plus l'angle formé par ces deux vecteurs « semble droit ».

Propriété 5

Deux droites du plan sont perpendiculaires si, et seulement si, un vecteur directeur de l'une est orthogonal à un vecteur directeur de l'autre.



2 Produit scalaire dans le plan

Dans ce paragraphe, toutes les coordonnées sont données dans un repère **orthonormé** du plan.

Propriété 6

Soit $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$. Le produit scalaire de \vec{u} et \vec{v} est donné par :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'.$$

Preuve. Remarquons préalablement que $\vec{u} + \vec{v} \begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \end{pmatrix}$. On a alors :

$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{v} &= \frac{1}{2} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2) \\ &= \frac{1}{2} ((x+x')^2 + (y+y')^2 - (x^2 + y^2) - (x'^2 + y'^2)) \\ &= \frac{1}{2} (x^2 + 2xx' + x'^2 + y^2 + 2yy' + y'^2 - x^2 - y^2 - x'^2 - y'^2) \\ &= \frac{1}{2} (2xx' + 2yy') = \frac{1}{2} \times 2(xx' + yy') = xx' + yy' .\end{aligned}$$

Remarque 4. Cette formule n'est valable **que dans un repère orthonormé**.

Propriété 7

- ★ Le produit scalaire est **distributif** par rapport à l'addition : $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$.
- ★ Pour deux réels k et k' : $(k\vec{u}) \cdot (k'\vec{v}) = (k \times k') \vec{u} \cdot \vec{v}$.
En particulier $(-\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (-\vec{v}) = -\vec{u} \cdot \vec{v}$.

Preuve. ★ Soit $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ et $\vec{w} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}$ dans un repère orthonormé. On a alors $\vec{v} + \vec{w} = \begin{pmatrix} x' + x'' \\ y' + y'' \end{pmatrix}$ puis :

$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) &= x(x' + x'') + y(y' + y'') = xx' + xx'' + yy' + yy'' = xx' + yy' + xx'' + yy'' \\ &= \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} .\end{aligned}$$

Exemple 3. Soit A, B, C et D quatre points du plan. Montrer que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC}$.

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BD}) = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DB}) = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC}$ d'après la relation de Chasles.

Propriété 8 (Formules de polarisation)

- ★ $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = (\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$
- ★ $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = (\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$
- ★ $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2 = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$

Preuve. Démontrons le premier point :

$$\begin{aligned}\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 &= (\vec{u} + \vec{v})^2 = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) \\ &= \vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{v} \text{ par distributivité} \\ &= \vec{u}^2 + \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2 \text{ par commutativité} \\ &= \vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2 .\end{aligned}$$

Théorème 9 (Application : Théorème de la médiane)

Soit A et B deux points distincts du plan et I le milieu de $[AB]$.

Pour tout M du plan,

- ① $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}$.
- ② $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{1}{4} AB^2$

Preuve.

Propriété 10

Pour deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} non nuls et trois points A, B et C distincts du plan :

- ★ $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}; \vec{v})$;
- ★ $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$.

Méthode 1. Déterminer un angle avec le produit scalaire

Dans un repère orthonormé, on considère $A(0; 0)$, $B(5; 1)$ et $C(2; 4)$.

① Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, AB et AC .

② En déduire une mesure de l'angle \widehat{BAC} .

On donnera le résultat en degrés, arrondi à 0,1 près.

① On a $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ donc :

$$\star \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 5 \times 2 + 1 \times 4 = 14$$

$$\star AB = \sqrt{5^2 + 1^2} = \sqrt{26}$$

$$\star AC = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

② De $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$, on déduit que $\cos(\widehat{BAC}) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{AB \times AC} = \frac{14}{\sqrt{26} \times 2\sqrt{5}} = \frac{7}{\sqrt{130}}$.

La calculatrice donne $\widehat{BAC} \approx 52,1^\circ$.

Remarque 5. Plus généralement, le produit scalaire et la relation de Chasles permettent de montrer le **théorème d'Al-Kashi** qui donne des relations entre les longueurs des côtés et les mesures des angles d'un triangle ABC **quelconque** :
 $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AC \times AB \cos(\widehat{BAC})$.

Propriété 11

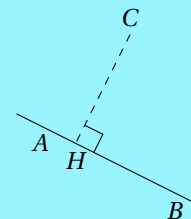
Si \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires, alors :

- ★ $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$ si \vec{u} et \vec{v} sont de même sens;
- ★ $\vec{u} \cdot \vec{v} = -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$ si \vec{u} et \vec{v} sont de sens opposés.

Définition 12

Dans le plan, on considère une droite (AB) et un point C extérieur à cette droite.

H le **projeté orthogonal** de C sur la droite (AB) est l'intersection de (AB) et de la perpendiculaire à (AB) passant par C .



Propriété 13

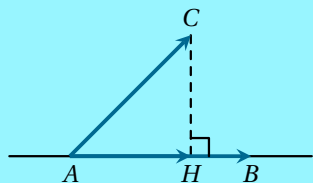
Soit A, B et C trois points distincts du plan et H est le projeté orthogonal de C sur (AB) .

On a alors :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}.$$

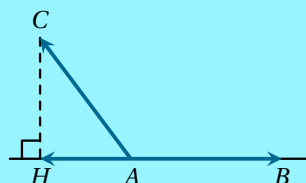
Plus précisément, si $H \neq A$, il y a deux configurations possibles :

★ \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AH} ont même sens :



$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = AB \times AH$$

★ \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AH} sont de sens opposés :



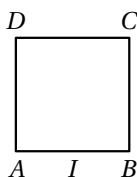
$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = -AB \times AH$$

Preuve. D'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HC}$ donc :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HC}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}$$

puisque, \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{HC} étant orthogonaux par définition de H , $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{HC} = 0$.

Exemple 4. On considère le carré $ABCD$ ci-dessous de côté 2 et I le milieu de $[AB]$.



Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ puis $\overrightarrow{IC} \cdot \overrightarrow{BI}$

★ B est le projeté orthogonal de C sur (AB) donc :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = AB^2 = 2^2 = 4.$$

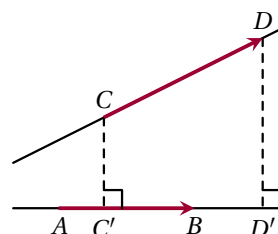
★ $\overrightarrow{IC} \cdot \overrightarrow{BI} = \overrightarrow{IC} \cdot \overrightarrow{IA} = \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IC}$ et B est le projeté orthogonal de C sur (IA) donc :

$$\overrightarrow{IC} \cdot \overrightarrow{BI} = \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB} = -IA \times IB = -1^2 = -1.$$

Remarque 6.

Soit C et D deux points distincts, extérieurs à une droite (AB) .

On peut montrer que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{C'D'}$, où C' et D' sont les projetés orthogonaux respectifs de C et D sur (AB) .



3 Orthogonalité dans l'espace

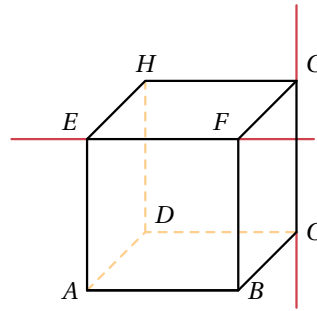
Définition 14 (Orthogonalité de deux droites)

Deux droites sont orthogonales si leurs parallèles passant par un même point sont perpendiculaires dans le plan qu'elles définissent.

Remarque 7. Deux droites perpendiculaires sont orthogonales mais la réciproque est fausse.

Exemple 5.

Dans le cube $ABCDEFGH$ ci-contre, $(EF) \parallel (HG)$ et $(HG) \perp (GC)$ donc (EF) et (GC) sont orthogonales. On note $(EF) \perp (GC)$.



Définition 15 (Orthogonalité d'une droite et d'un plan)

Une droite est orthogonale à un plan lorsqu'elle est orthogonale à toutes les droites de ce plan.

Théorème 16

Si une droite est orthogonale à deux droites sécantes d'un plan alors elle est orthogonale à ce plan.

Méthode 2 (Démontrer l'orthogonalité de deux droites). Dans le cube $ABCDEFGH$ représenté dans l'exemple précédent, démontrer que $(GC) \perp (BD)$.

La droite (GC) est perpendiculaire à (BC) et à (CD) qui sont deux droites sécantes du plan (ABC) donc (GC) est orthogonale au plan (ABC) donc à toutes les droites de ce plan. En particulier, on en déduit que $(GC) \perp (BD)$.

4 Produit scalaire dans l'espace

Remarque 8. Deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} de l'espace sont nécessairement coplanaires :

- ★ s'ils sont colinéaires, alors il existe une infinité de plans contenant \vec{u} et \vec{v} ;
- ★ s'ils ne sont pas colinéaires, ramenons-les à une même origine A et considérons le plan engendré par A , \vec{u} et \vec{v} qui contient donc, par construction, les vecteurs \vec{u} et \vec{v} .

Définition 17

Le **produit scalaire** de deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} dans l'espace est leur produit scalaire dans un plan les contenant.

Propriété 18 (Propriétés algébriques)

Soient \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} trois vecteurs et λ un réel. Alors :

- ★ $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$
- ★ $\vec{u} \cdot (\lambda \vec{v}) = \lambda(\vec{u} \cdot \vec{v})$
- ★ $(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$ et $(\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$
- ★ $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$

Propriété 19 (Orthogonalité)

Deux droites sont orthogonales si et seulement si leurs vecteurs directeurs respectifs sont orthogonaux.

Définition 20 (Repère orthonormé)

Un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace est dit orthonormé si les vecteurs \vec{i} , \vec{j} et \vec{k} sont orthogonaux deux à deux et si $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1$.

Propriété 21 (Expression analytique du produit scalaire)

Dans l'espace muni d'une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère deux vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$.

Alors $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$.

Preuve. Écrire \vec{u} et \vec{v} en fonction de $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$

Exemple 6. Dans un repère orthonormé, soient (d_1) et (d_2) deux droites de représentations

$$\text{paramétriques } \begin{cases} x = 1+t \\ y = 2+2t \\ z = -5-7t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \text{ et } \begin{cases} x = 5-t \\ y = -1+4t \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Les vecteurs $\vec{u}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix}$ et $\vec{u}_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, qui dirigent respectivement (d_1) et (d_2) sont orthogonaux puisque $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = -1 + 8 - 7 = 0$.

Ainsi, (d_1) et (d_2) sont orthogonales.

Méthode 3 (Calculer la mesure d'un angle).] Pour calculer un angle géométrique formé par deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} , on exprime $\vec{u} \cdot \vec{v}$ de deux façons différentes : l'une permettant d'obtenir la valeur du produit scalaire, l'autre faisant intervenir l'angle.

EXERCICE Soit $ABCDEFGH$, un cube de côté 1 et I le centre de la face $EFGH$.

On se place dans le repère orthonormé $(A; \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$.

Déterminer, au degré près, les mesures des angles :

① $\alpha = \widehat{IBF}$

② $\beta = \widehat{BID}$

CORRECTION

① $\vec{BF} \cdot \vec{BI} = \vec{BF} \cdot \vec{BF}$ car \vec{BF} est le projeté orthogonal de \vec{BI} sur (BF) . Ainsi, $\vec{BI} \cdot \vec{BF} = 1$.

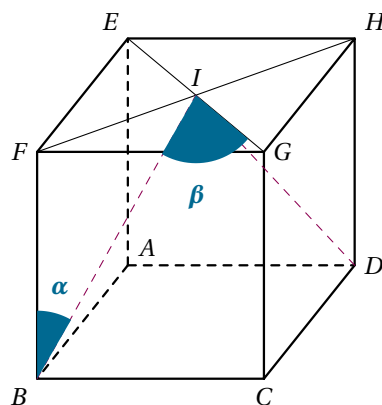
D'autre part, $\vec{BF} \cdot \vec{BI} = BF \times BI \times \cos(\alpha) = BI \times \cos(\alpha)$.

De plus, $B(1;0;0)$ et $I\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 1\right)$ donc $BI = \sqrt{\left(\frac{1}{2}-1\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{\frac{3}{2}}$.

Ainsi, $\sqrt{\frac{3}{2}} \times \cos(\alpha) = 1$ et donc $\cos(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{3}}$. On en déduit alors que $\alpha \approx 35^\circ$.

② $\vec{IB} \begin{pmatrix} 0,5 \\ -0,5 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{ID} \begin{pmatrix} -0,5 \\ 0,5 \\ -1 \end{pmatrix}$ donc $\vec{IB} \cdot \vec{ID} = -0,25 - 0,25 + 1 = 0,5 = \frac{1}{2}$.

D'autre part, $\vec{IB} \cdot \vec{ID} = IB \times ID \times \cos(\beta) = \sqrt{\frac{3}{2}} \times \sqrt{\frac{3}{2}} \times \cos(\beta) = \frac{3}{2} \cos(\beta)$. Par conséquent, $\frac{1}{2} = \frac{3}{2} \cos(\beta)$, et donc $\cos(\beta) = \frac{1}{3}$. On en déduit alors que $\beta \approx 71^\circ$.



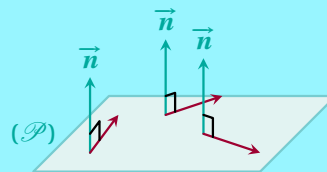
Exemple 7. On se place dans le cube $ABCDEFGH$ comme décrit dans la méthode précédente.

$\vec{IB} \cdot \vec{ID} = \left(\frac{1}{2}\vec{HF} + \vec{FB}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\vec{FH} + \vec{HD}\right) = \left(\vec{FB} + \frac{1}{2}\vec{HF}\right) \cdot \left(\vec{FB} - \frac{1}{2}\vec{HF}\right) = \vec{FB}^2 - \frac{1}{4}\vec{HF}^2$. Comme $FB = 1$ et que $HF = \sqrt{2}$, on en déduit que $\vec{IB} \cdot \vec{ID} = 1 - \frac{1}{4} \times 2 = \frac{1}{2}$.

5 Vecteur normal à un plan

Définition 22 (Vecteur normal)

Un vecteur \vec{n} est dit normal à un plan (\mathcal{P}) s'il est non nul et orthogonal à tous les vecteurs contenus dans (\mathcal{P}) .



Propriété 23

Une droite est orthogonale à un plan si et seulement si un de ses vecteurs directeurs est un vecteur normal du plan.

Preuve. Soient (d) une droite de vecteur directeur \vec{u} et (\mathcal{P}) un plan.

Par définition, (d) est orthogonale à (\mathcal{P}) si et seulement si (d) est orthogonale à toute droite de (\mathcal{P}) . Cela signifie que \vec{u} est orthogonal à tout vecteur contenu dans (\mathcal{P}) , autrement dit, que \vec{u} est un vecteur normal de (\mathcal{P}) .

Propriété 24

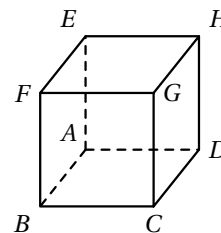
Si un vecteur est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires d'un plan alors c'est un vecteur normal à ce plan.

Preuve. Soient (\mathcal{P}) un plan, \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs non colinéaires de ce plan auxquels est orthogonal un vecteur non nul \vec{n} . Montrons que \vec{n} est orthogonal à tout vecteur de (\mathcal{P}) .

Ramenons \vec{u} et \vec{v} à une même origine A : $(A; \vec{u}, \vec{v})$ est alors un repère de \mathcal{P} et tout vecteur \vec{w} peut s'écrire $\vec{w} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{v}$, où α et β sont deux réels. Ainsi, $\vec{w} \cdot \vec{n} = \alpha \vec{u} \cdot \vec{n} + \beta \vec{v} \cdot \vec{n} = 0$.

Exemple 8. Soit $ABCDEFGH$ un cube d'arête $a > 0$.

Les faces $ABFE$ et $BCGF$ étant des carrés, le vecteur \vec{FB} est orthogonal aux vecteurs \vec{BA} et \vec{BC} qui sont deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC) . Ainsi, \vec{FB} est un vecteur normal au plan (ABC) . On peut aussi dire que la droite (FB) est orthogonale au plan (ABC) .



Exemple 9. Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points $A(1; 1; 1)$ et $B(-2; 0; 2)$

ainsi que les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

\vec{u} et \vec{v} ne sont pas colinéaires donc on peut définir le plan (\mathcal{P}) engendré par A , \vec{u} et \vec{v} .

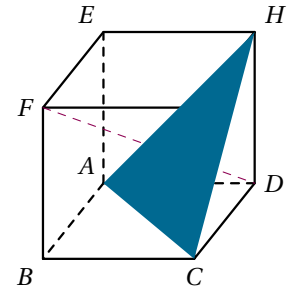
De plus, $\vec{AB} \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est orthogonal à \vec{u} et \vec{v} donc \vec{AB} est un vecteur normal au plan (\mathcal{P}) .

Méthode 4 (Démontrer une orthogonalité).

Soit $ABCDEFGH$, un cube d'arête 1.

Démontrons que la droite (FD) est orthogonale au plan (ACH) .

CORRECTION Il suffit de prouver que \overrightarrow{FD} est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ACH) , par exemple \overrightarrow{AC} et \overrightarrow{HC} . Démontrons alors que $\overrightarrow{FD} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{FD} \cdot \overrightarrow{HC} = 0$.



Calculons le premier produit scalaire en utilisant les propriétés algébriques et le second analytiquement :

$$\star \overrightarrow{FD} \cdot \overrightarrow{AC} = (\overrightarrow{FB} + \overrightarrow{BD}) \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{FB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AC}.$$

D'une part, et d'après l'exemple précédent, \overrightarrow{FB} est un vecteur normal au plan (ABC) donc il est orthogonal à tout vecteur à ce plan, en particulier à \overrightarrow{AC} . Ainsi, $\overrightarrow{FB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$.

D'autre part, $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ car $[BD]$ et $[AC]$ sont les diagonales du carré $ABCD$.

On en conclut que $\overrightarrow{FD} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$.

★ En se plaçant dans le repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$, on a $C(1; 1; 0)$, $D(0; 1; 0)$, $F(1; 0; 1)$ et $H(0; 1; 1)$ et ainsi,

$$\overrightarrow{FD} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{HC} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}. \text{ Par conséquent, } \overrightarrow{FD} \cdot \overrightarrow{HC} = -1 + 0 + 1 = 0.$$

Propriété 25

Soit \vec{n} un vecteur normal à un plan (\mathcal{P}) . Alors, tout vecteur non nul colinéaire à \vec{n} est aussi un vecteur normal de (\mathcal{P}) .

Preuve. Soit \vec{m} un vecteur non nul colinéaire à \vec{n} , c'est-à-dire tel que $\vec{m} = k\vec{n}$, $k \in \mathbb{R}^*$. Montrons que \vec{m} est orthogonal à tout vecteur de (\mathcal{P}) .

Soit \vec{w} un vecteur de (\mathcal{P}) . Alors $\vec{w} \cdot \vec{m} = \vec{w} \cdot (k\vec{n}) = k(\vec{w} \cdot \vec{n}) = 0$.

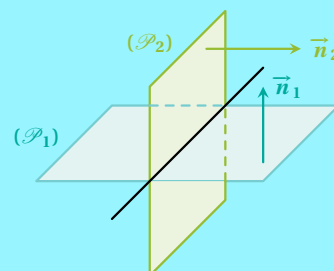
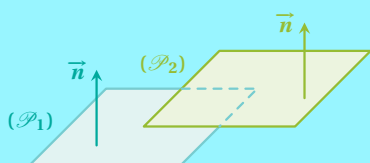
Remarque 9. La projection orthogonale d'un point A sur un plan (\mathcal{P}) est le point H appartenant à (\mathcal{P}) tel que (AH) soit orthogonale à (\mathcal{P}) ou, autrement dit, que \overrightarrow{AH} soit un vecteur normal à (\mathcal{P}) .

Exemple 10. En reprenant la configuration de la méthode précédente, considérons I le centre de gravité de ACH . Alors $\overrightarrow{HI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{HM}$, où M est le milieu de $[AC]$, donc $\overrightarrow{HI} = \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{HD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DB}\right)$.

Ainsi $\overrightarrow{FI} = \overrightarrow{FH} + \frac{2}{3}\overrightarrow{HD} - \frac{1}{3}\overrightarrow{BD} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{FH} + \overrightarrow{HD}) = \frac{2}{3}\overrightarrow{FD}$. \overrightarrow{FI} est donc aussi un vecteur normal à (ACH) et comme $I \in (ACH)$, on en déduit que I est le projeté orthogonal de F sur (ACH) .

Propriété 26 (Parallélisme et perpendicularité de plans)

- ★ Deux plans sont parallèles si et seulement si tout vecteur normal de l'un est un vecteur normal de l'autre.
- ★ Deux plans sont perpendiculaires si et seulement si un vecteur normal de l'un est orthogonal à un vecteur normal de l'autre.



Exemple 11. On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé.

★ Soient (\mathcal{P}_1) et (\mathcal{P}_2) deux plans de vecteurs normaux respectifs $\vec{n}_1 \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{n}_2 \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

\vec{n}_1 et \vec{n}_2 sont colinéaires : les plans (\mathcal{P}_1) et (\mathcal{P}_2) sont donc parallèles.

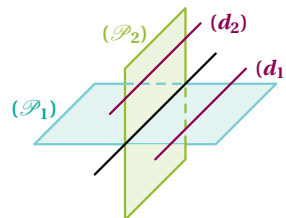
★ Soient (\mathcal{P}_1) et (\mathcal{P}_2) deux plans de vecteurs normaux respectifs $\vec{n}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{n}_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

\vec{n}_1 et \vec{n}_2 ne sont pas colinéaires : les plans (\mathcal{P}_1) et (\mathcal{P}_2) sont donc sécants, mais $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 \neq 0$ donc (\mathcal{P}_1) et (\mathcal{P}_2) ne sont pas perpendiculaires.

Remarque 10. Soient (\mathcal{P}_1) et (\mathcal{P}_2) , deux plans perpendiculaires.

Si (d_1) est une droite de (\mathcal{P}_1) et (d_2) est une droite de (\mathcal{P}_2) , alors (d_1) et (d_2) ne sont pas nécessairement orthogonales.

Ci-contre, deux droites (d_1) et (d_2) parallèles.



Propriété 27

Soient \vec{n} un vecteur non nul, A un point et (\mathcal{P}) le plan passant par A et de vecteur normal \vec{n} . Alors un point M appartient à (\mathcal{P}) si et seulement si $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$.

Preuve. ★ Si M appartient à (\mathcal{P}) alors \overrightarrow{AM} est un vecteur de (\mathcal{P}) et est donc orthogonal à \vec{n} .

★ Réciproquement, soit M un point de l'espace tel que $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$. Considérons H le projeté orthogonal de M sur (\mathcal{P}) . Alors $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} = \vec{n} \cdot (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HM}) = \vec{n} \cdot \overrightarrow{AH} + \vec{n} \cdot \overrightarrow{HM}$.

D'une part, \overrightarrow{AH} est contenu dans (\mathcal{P}) , donc \vec{n} et \overrightarrow{AH} sont orthogonaux et ainsi $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AH} = 0$.

D'autre part, \overrightarrow{HM} et \vec{n} sont colinéaires et donc $\vec{n} \cdot \overrightarrow{HM} = \|\vec{n}\| \times HM$ ou $-\|\vec{n}\| \times HM$.

On en déduit donc que $\|\vec{n}\| \times HM = 0$ et ainsi, puisque $\vec{n} \neq 0$, $HM = 0$: le point M est confondu avec le point H , il appartient donc à (\mathcal{P}) .

6 Équations cartésienne et paramétrique d'un plan

Propriété 28

Dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace, le plan \mathcal{P} passant par $A(x_A; y_A; z_A)$ et de vecteurs

directeurs $\vec{u} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \\ \gamma' \end{pmatrix}$.

$M(x; y; z) \in \mathcal{P}$ si et seulement si il existe deux réels t et t' tels que :

$$\begin{cases} x = x_A + t\alpha + t'\alpha' \\ y = y_A + t\beta + t'\beta' \\ z = z_A + t\gamma + t'\gamma' \end{cases}$$

On dit que ce système d'équations est une représentation paramétrique du plan \mathcal{P} passant par $A(x_A; y_A; z_A)$ et de

vecteurs directeurs $\vec{u} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \\ \gamma' \end{pmatrix}$.

Preuve. $M(x; y; z) \in \mathcal{P}$ si et seulement si \overrightarrow{AM} , \vec{u} et \vec{v} sont coplanaires, c'est-à-dire qu'il existe deux réels t et t' tels que $\overrightarrow{AM} = t\vec{u} + t'\vec{v}$. Cela se traduit en terme de coordonnées par :

$$\begin{cases} x - x_A = t\alpha + t'\alpha' \\ y - y_A = t\beta + t'\beta' \\ z - z_A = t\gamma + t'\gamma' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_A + t\alpha + t'\alpha' \\ y = y_A + t\beta + t'\beta' \\ z = z_A + t\gamma + t'\gamma' \end{cases}.$$

Remarque 11. Il existe une infinité de représentations paramétriques, que ce soit pour une droite ou pour un plan.

Propriété 29 (Caractérisation algébrique d'un plan)

Soit $M(x; y; z)$ un point de l'espace muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

★ Si M appartient à un plan (\mathcal{P}) , alors ses coordonnées vérifient une relation du type :
 $ax + by + cz + d = 0$,

avec a, b et c des réels non simultanément nuls.

★ Réciproquement :

L'ensemble des points $M(x; y; z)$ de l'espace vérifiant une relation du type $ax + by + cz + d = 0$, avec a, b et c non simultanément nuls est un plan, que l'on note (\mathcal{P}) .

On dit que (\mathcal{P}) a pour équation $ax + by + cz + d = 0$, appelée équation cartésienne du plan et de plus, $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à (\mathcal{P}) .

Preuve. ★ Soit (\mathcal{P}) un plan passant par un point $A(x_0; y_0; z_0)$ et de vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$.

M appartenant à (\mathcal{P}) , les vecteurs \overrightarrow{AM} et \vec{n} sont orthogonaux, c'est-à-dire analytiquement :
 $(x - x_0)\alpha + (y - y_0)\beta + (z - z_0)\gamma = 0$

ou encore, en développant :

$$\alpha x + \beta y + \gamma z - \alpha x_0 - \beta y_0 + \gamma z_0 = 0.$$

Cette dernière égalité est bien de la forme annoncée en posant $a = \alpha, b = \beta, c = \gamma$ et $d = -\alpha x_0 - \beta y_0 + \gamma z_0$.

★ a, b et c n'étant pas simultanément nuls, il existe $A(x_0; y_0; z_0)$ tel que $ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0$:

- si $a \neq 0$, alors le triplet $\left(-\frac{d}{a}; 0; 0\right)$ vérifie l'égalité $ax + by + cz + d = 0$;
- si $a = 0$, on peut procéder de façon similaire puisqu'alors $b \neq 0$ ou $c \neq 0$.

Les coordonnées du point M vérifiant aussi l'égalité, on en déduit que :

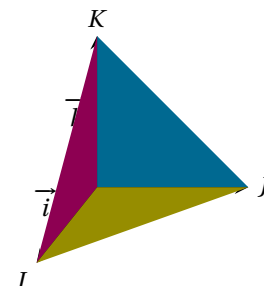
$$ax + by + cz + d = ax_0 + by_0 + cz_0 + d,$$

ce qui peut aussi s'écrire : $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$.

Cette dernière égalité n'étant rien d'autre que la traduction analytique de l'orthogonalité entre les vecteurs \overrightarrow{AM} et $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ ($\vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$), on en déduit, d'après la propriété précédente, que M appartient au plan passant par A et de vecteur normal \vec{n} .

Exemple 12. On munit l'espace d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

- ★ Le plan (OJK) a pour équation $x = 0$ et admet pour vecteur normal le vecteur \vec{i} .
- ★ Le plan (OIK) a pour équation $y = 0$ et admet pour vecteur normal le vecteur \vec{j} .
- ★ Le plan (OIJ) a pour équation $z = 0$ et admet pour vecteur normal le vecteur \vec{k} .



Méthode 5 (Déterminer une équation cartésienne d'un plan (cas particulier)). Dans le cas où le plan (\mathcal{P}) est défini par un point A et un vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$:

- ① écrire l'équation de (\mathcal{P}) sous la forme $ax + by + cz + d = 0$ où le réel d reste à déterminer;
- ② déterminer d en utilisant les coordonnées du point A .

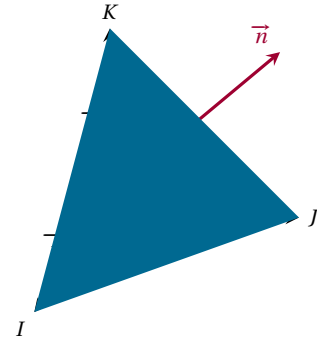
Méthode 6 (Déterminer une équation cartésienne d'un plan (cas général)). Dans le cas où l'on donne trois points A , B et C pour définir un plan (\mathcal{P}) :

- ① s'assurer que le plan (\mathcal{P}) est bien défini en montrant que A , B et C ne sont pas alignés;
- ② déterminer les coordonnées d'un vecteur normal à (\mathcal{P}) ;
- ③ en déduire une équation cartésienne de (\mathcal{P}) en se référant à la méthode précédente.

Exemple 13. On munit l'espace d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Dans ce repère on considère les points $I(1;0;0)$, $J(0;1;0)$ et $K(0;0;1)$. Le plan

(IJK) a pour équation $x + y + z - 1 = 0$ et admet pour vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.



Méthode 7 (Déterminer, si elle existe, l'**intersection d'une droite et d'un plan**). Soient (d) une droite dirigée par \vec{u} et (\mathcal{P}) un plan de vecteur normal \vec{n} .

- ① Tester le parallélisme de (d) et (\mathcal{P}) en calculant $\vec{u} \cdot \vec{n}$:
 - (a) si $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$, alors (d) est parallèle, strictement ou non, à (\mathcal{P}) ;
 - (b) si $\vec{u} \cdot \vec{n} \neq 0$, alors (d) et (\mathcal{P}) se coupent en un point M .
- ② Si l'intersection existe, résoudre le système composé des équations décrivant (d) et (\mathcal{P}) afin de calculer les coordonnées de M .

Méthode 8 (Déterminer, si elle existe, l'**intersection de deux plans**). Soient (\mathcal{P}_1) et (\mathcal{P}_2) deux plans de vecteurs normaux respectifs \vec{n}_1 et \vec{n}_2 .

- ① Tester le parallélisme de (\mathcal{P}_1) et (\mathcal{P}_2) en testant la colinéarité de \vec{n}_1 et \vec{n}_2 .
- ② Si les plans ne sont pas parallèles :
 - (a) écrire le système composé des équations décrivant (\mathcal{P}_1) et (\mathcal{P}_2) ;
 - (b) choisir une des coordonnées comme paramètre;
 - (c) en déduire une représentation paramétrique de la droite d'intersection.